

Unidad IV

Prueba de Hipótesis Parte II

¿¿¿Con cuál me quedo???

Hipótesis Nula:
No hay diferencias

Hipótesis Alternativa:
Hay diferencias significativas



Estadísticos de Prueba de hipótesis para $E(X) = \mu$

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

σ^2 es conocido

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = Z \sim N(0, 1)$$

σ^2 es desconocido

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n \text{ ?})$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

Si $X \sim \text{????}$

σ^2 es conocido

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = Z \sim N(0, 1)$$

$n \geq 30$, por el
Teo. Central de L.

σ^2 es desconocido

$$Z \cong \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Enfoque P en una Prueba de Hipótesis

¿Qué será eso?



Valor P de una prueba de hipótesis

Otra manera de presentar los resultados de una **Prueba de hipótesis** es establecer que la hipótesis nula fue o no rechazada con un valor especificado α o nivel de significación. Esta nueva forma es el **enfoque del valor P**.

Definición:

El **valor P** es el *nivel de significación* más pequeño que conduce al **rechazo** de la hipótesis nula H_0 .

El **valor P** es la probabilidad de que el **estadístico de prueba** tome un valor que sea al menos tan extremo como el **valor observado del estadístico de prueba** cuando la hipótesis nula H_0 es verdadera.

Para aplicar el enfoque del **valor P** se necesita:

1. El planteo de las hipótesis.
2. El estadístico de prueba y su distribución bajo H_0 cierta.
3. El valor del estadístico de prueba bajo H_0 cierta.



Prueba de hipótesis para la media de una población normal con varianza conocida

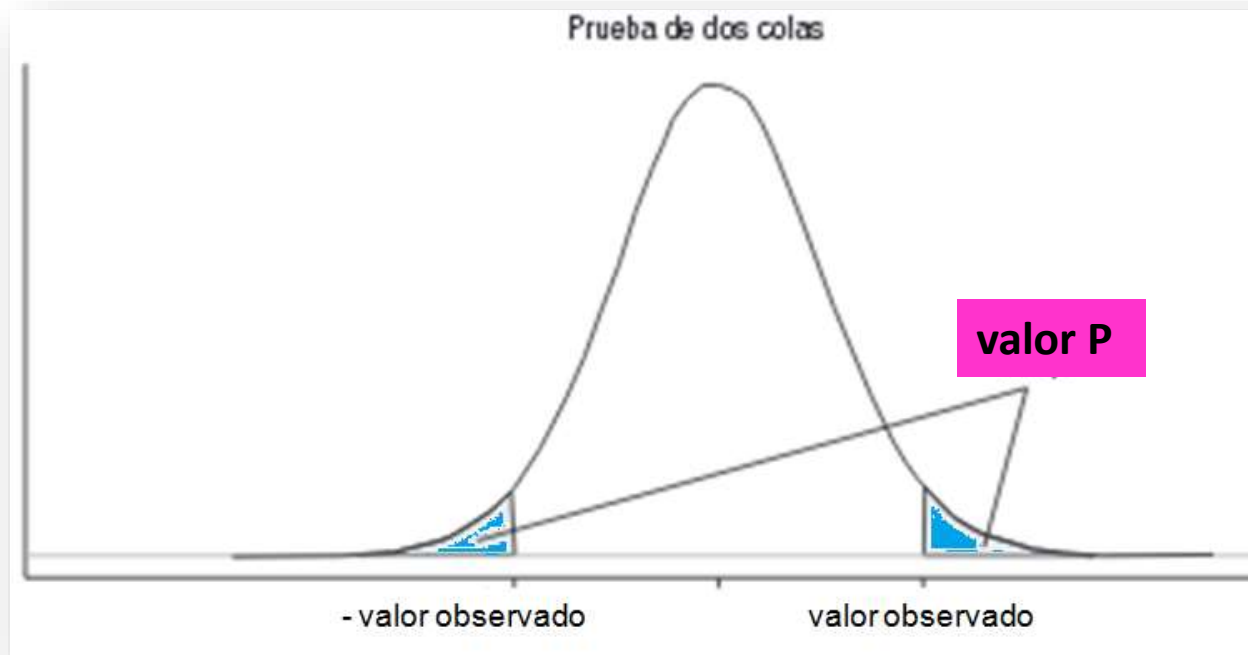
Prueba bilateral:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$\text{valor P} = P(Z \leq -|z_{\text{obs}}|) + P(Z \geq |z_{\text{obs}}|) = 2 * P(Z \leq -|z_{\text{obs}}|)$$

donde z_{obs} es el valor del estadístico de prueba calculado en los datos de la muestra.



Prueba de hipótesis para la media de una población normal con varianza conocida

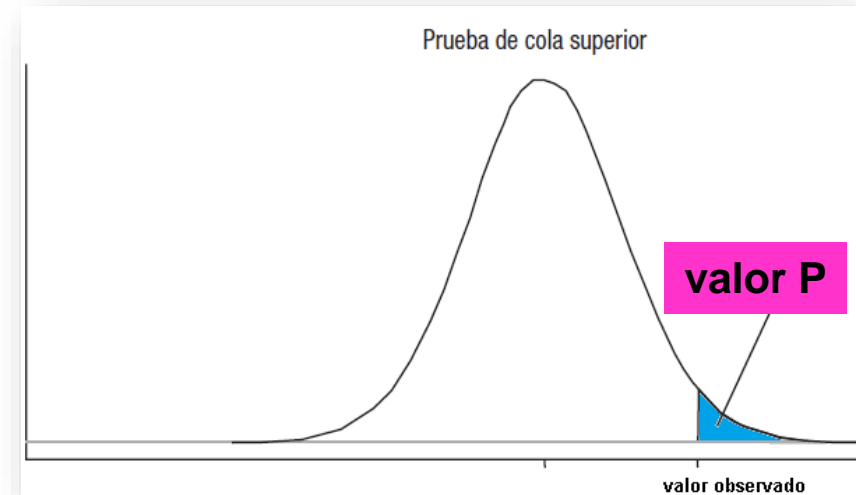
Pruebas unilaterales:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu > \mu_0$$

$$\text{valor } P = P(Z \geq z_{\text{obs}})$$

donde z_{obs} es el valor del estadístico de prueba calculado en los datos de la muestra.

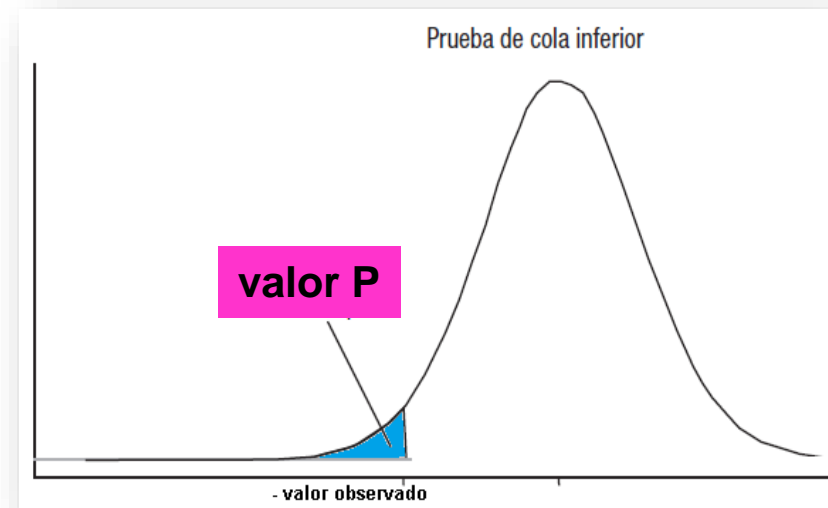


$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu < \mu_0$$

$$\text{valor } P = P(Z \leq -z_{\text{obs}})$$

donde $-z_{\text{obs}}$ es el valor del estadístico de prueba calculado en los datos de la muestra.



Prueba de hipótesis para la media de una población normal con varianza conocida

Decisión mediante el enfoque del valor P:

- Si el nivel de significación observado, ie, el **valor P**, es **menor o igual** que **0.05** entonces se decide **Rechazar lo que postula H_0** ,
- en **caso contrario**, no se Rechaza H_0 .

Valor P: Prueba de hipótesis significativa o no significativa

Valor P		Decisión	La prueba es	Se simboliza
Si $P \leq 0.05$	$P \leq 0.01$	Rechazo H_0	Altamente significativa	**
	$0.01 < P \leq 0.05$	Rechazo H_0	Significativa	*
Si $P > 0.05$		No Rechazo H_0	No significativa	n.s.

Que una prueba de hipótesis sea **significativa** significa que la conclusión a la que se llegó **no se debe** al mero **azar**.

Si se analiza por ejemplo, la **eficacia de un antivirus**, un resultado experimental «*significativo*» con un valor **P** de **0,05** o **menos** significa que **hay una probabilidad de 0.05 o menos** de que el antivirus **no sea eficaz**.

Prueba de hipótesis para la media poblacional con varianza conocida

Ejemplo

Un hipermercado ha cambiado recientemente sus máquinas registradoras, lo que hace suponer que el tiempo promedio de facturación por cliente puede haber variado respecto al tiempo promedio de facturación con las máquinas anteriores, que era de 10 minutos. Para probar la validez de esta suposición, se seleccionó una muestra aleatoria de 16 clientes que arrojó un tiempo promedio de facturación por cliente de 8.5 minutos.

Es posible suponer que el tiempo de facturación por cliente es una v.a. distribuida normalmente con un desvío estándar de 2.5 minutos.

¿Se puede concluir que el tiempo promedio de facturación por cliente ha cambiado respecto del valor histórico de 10 minutos? Concluir usando el **valor P**.



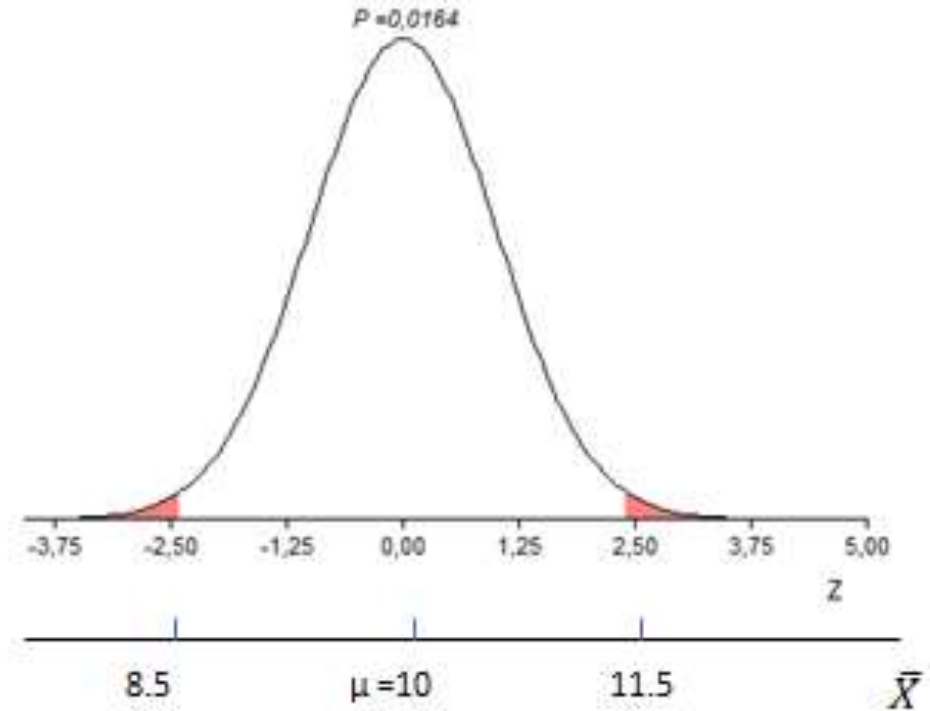
Prueba de hipótesis para la media poblacional con varianza conocida

Ejemplo:

Planteo $H_0: \mu = 10$
 $H_1: \mu \neq 10$

Estadístico de Prueba bajo H_0 cierta:

$$Z = \frac{\bar{X} - 10}{2.5/\sqrt{16}} \sim N(0, 1)$$



Valor del estadístico de Prueba bajo H_0 cierta:

Datos: $n = 16$ clientes , que arrojó $\bar{x} = 8.5$ minutos

$$Z = \frac{8.5 - 10}{2.5/\sqrt{16}} = \frac{-1.5}{0.625} = -2.4$$

Calculo del valor P:

$$P = P(Z \leq -|-2.4|) + P(Z \geq |-2.4|) = 2 * P(Z \leq -|2.4|) = 2 * 0.0082 = \mathbf{0.0164}.$$

Como $P = 0,0164 < 0.05$, entonces Rechazo H_0 .

Prueba de hipótesis para la media poblacional con varianza conocida

Planteo $H_0: \mu = 10$
 $H_1: \mu \neq 10$

Como $P = 0,0164 < 0.05$, entonces rechazo H_0 .

Conclusión:

Con una probabilidad de error menor a **0.0164**, existen evidencias suficientes para afirmar que el tiempo promedio de facturación por cliente con las máquinas nuevas ha variado respecto del tiempo promedio histórico. **La prueba es significativa.**

Prueba de hipótesis para la media de una población normal con varianza desconocida

Pruebas unilaterales:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu > \mu_0$$

$$\text{valor } P = P(t_{n-1} \geq t_{\text{obs}})$$

donde t_{obs} es el valor del estadístico de prueba calculado en los datos de la muestra.

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu < \mu_0$$

$$\text{valor } P = P(t_{n-1} \leq -t_{\text{obs}})$$

donde $-t_{\text{obs}}$ es el valor del estadístico de prueba calculado en los datos de la muestra.

Prueba bilateral:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$\text{valor } P = P(t_{n-1} \leq -|t_{\text{obs}}|) + P(t_{n-1} \geq |t_{\text{obs}}|) = 2 * P(t_{n-1} \geq |t_{\text{obs}}|)$$

donde t_{obs} es el valor del estadístico de prueba calculado en los datos de la muestra.

Ejemplo

El Centro de Atención Telefónica del banco Business debe tardar a lo sumo 4 minutos en resolver cualquier trámite de un usuario, para cumplir con lo establecido por el Departamento de Atención al Cliente. Una muestra de 25 llamados arrojó una duración promedio de 4.5 minutos, con una desviación estándar de 1.4 minutos.

Si se supone que la duración de una llamada telefónica para resolver cualquier trámite es una v.a. con distribución normal. ¿El Centro de atención al Cliente cumple con lo fijado por el Departamento del Atención al Cliente? Concluir **usando el valor P**.

Sea la v.a.

X = “duración de una llamada telefónica para resolver cualquier trámite”,

X $\sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 es desconocido.

\bar{X} $\sim N(\mu, \sigma^2/n = ?)$,



Ejemplo: Prueba de hipótesis para la media poblacional con varianza desconocida

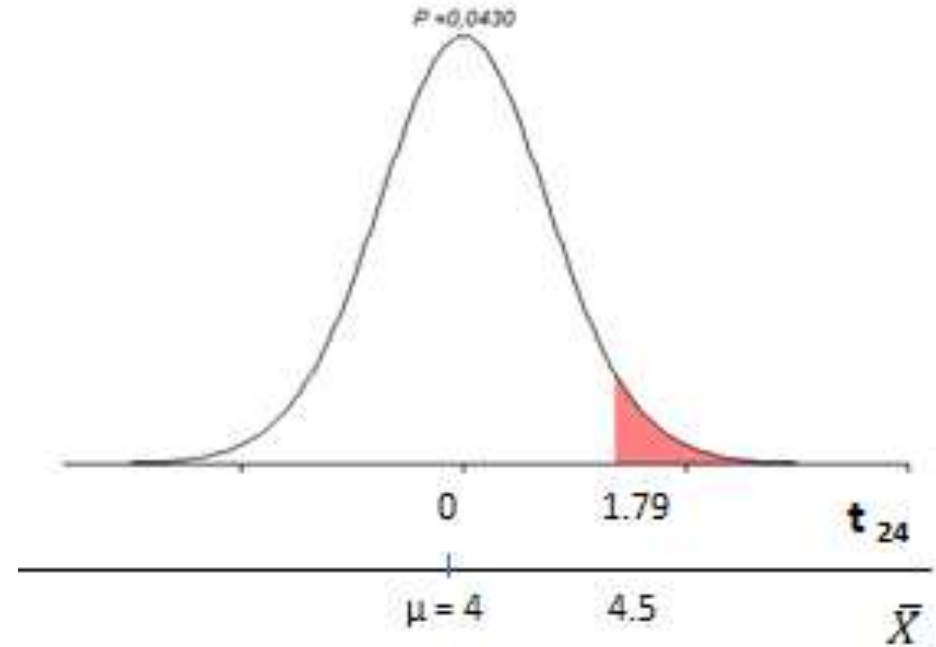
Planteo

$H_0: \mu \leq 4$ (es equivalente a $\mu = 4$)

$H_1: \mu > 4$

Estadístico de Prueba: bajo H_0 cierta

$$t = \frac{\bar{X} - 4}{S/\sqrt{25}} \sim t_{n-1=24}$$



El valor del estadístico es:

$$t = \frac{4,5 - 4}{1,4/\sqrt{25}} = \frac{0,5}{0,28} = \mathbf{1.79}$$

Datos: $n = 25$, $\bar{x} = 4.5$ minutos y $s = 1.4$ minutos.

valor $P = P(t_{n-1} \geq t_o) = P(t_{25-1} \geq 1.79) = 0.04303$

Por lo tanto, dado que en la prueba de hipótesis resultó un valor **$P = 0.04303$** , Al ser **$P < 0.05$** , entonces **se Rechaza** la hipótesis nula, H_0 .

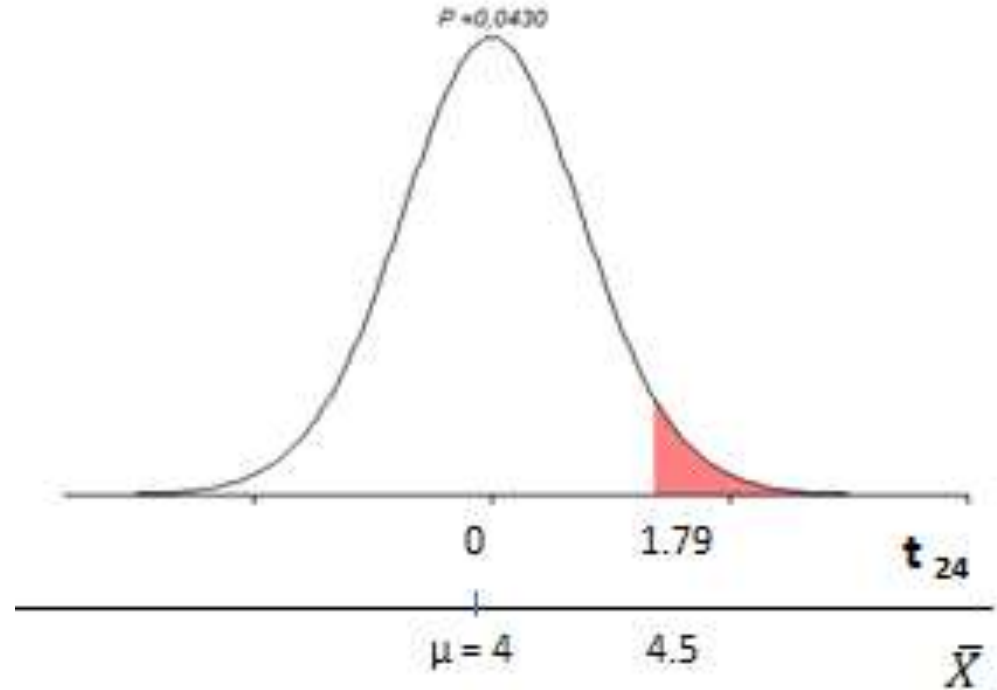
Ejemplo: Prueba de hipótesis para la media poblacional con varianza desconocida

Planteo

$H_0: \mu \leq 4$ (es equivalente a $\mu = 4$)

$H_1: \mu > 4$

P = 0.04303, Al ser **P < 0.05**, entonces **se Rechaza** la hipótesis nula, H_0 .



Conclusión: Con una probabilidad de error de **0.04303**, existen evidencias suficientes para afirmar que la duración promedio de una llamada telefónica para resolver cualquier trámite es superior a los 4 minutos. El Centro de Atención Telefónica del banco Business no cumple con lo fijado por el Departamento del Atención al Cliente. **La prueba es significativa.**

Ejemplo salida del Infostat

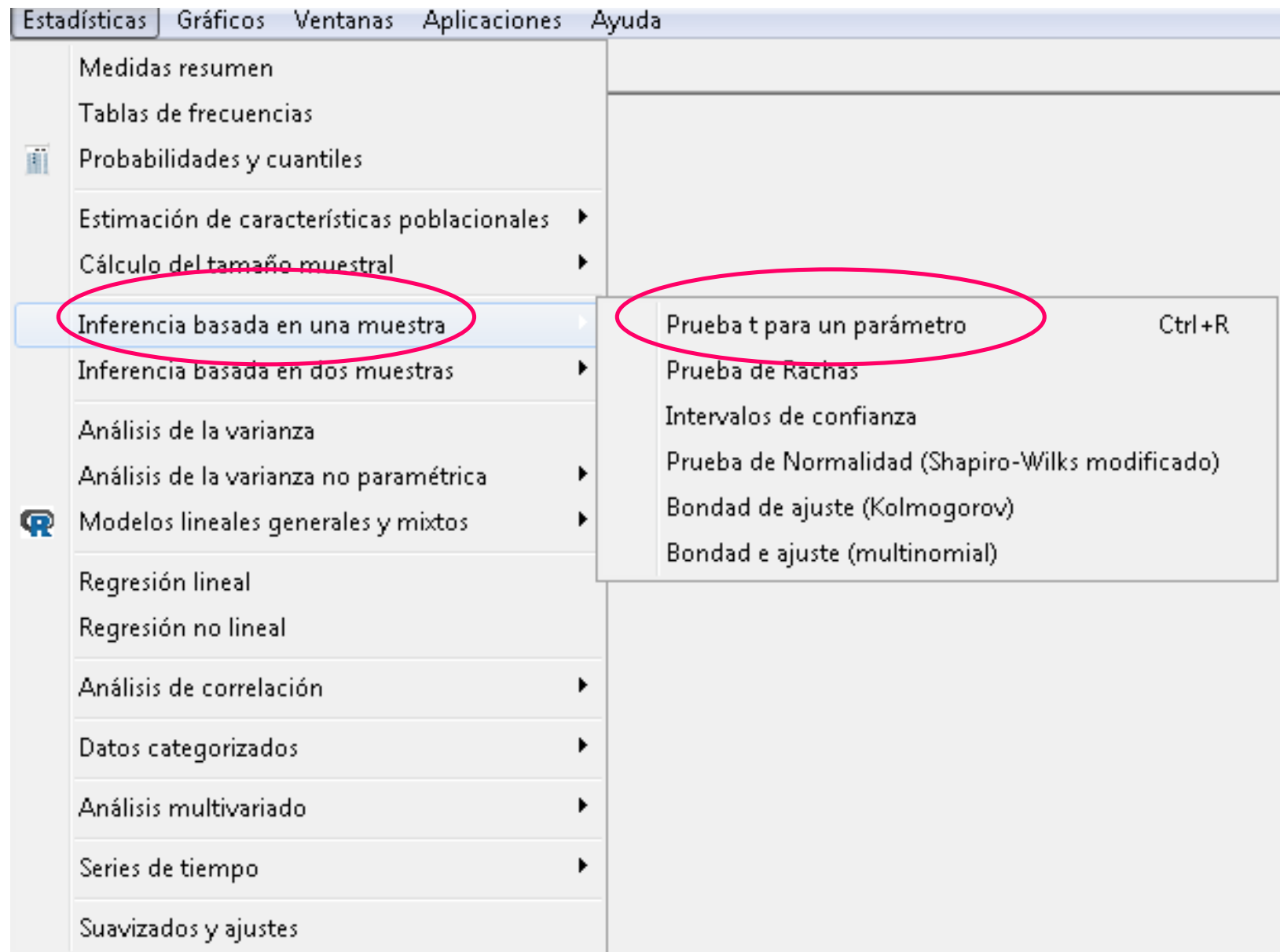
La tecnología laser se usa para detectar movimientos estructurales en puentes y grandes edificios. Estos equipos deben ser precisos. En pruebas de laboratorio, se obtienen mediciones del error de dichos equipos. Se efectuaron al azar 25 mediciones con estos equipos y los resultados de los errores (en mm) fueron los siguientes:

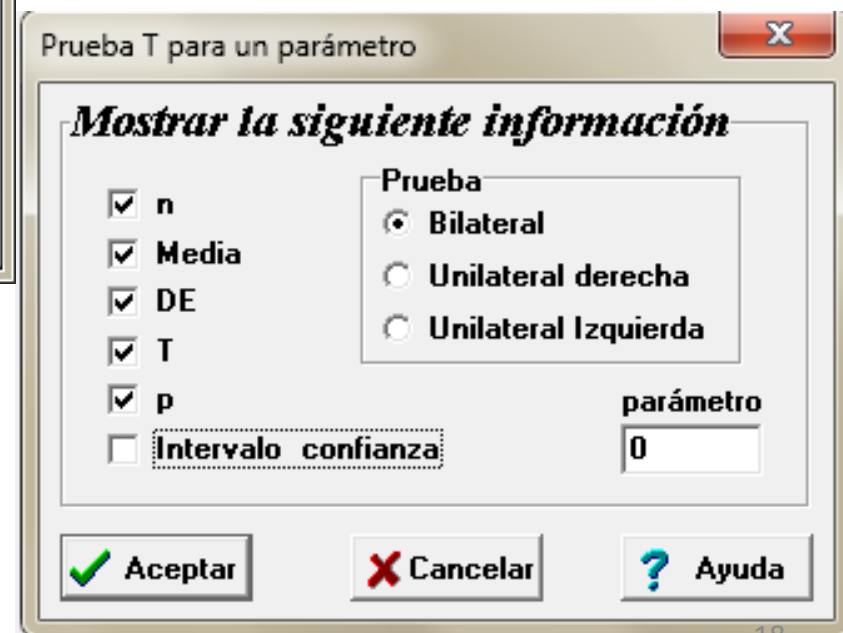
0.013	0.04	0.01	0.03	0.02	0.01	0.05	0.03	0.04	0.01
0.01	0.01	0.03	0.02	0.02	0.03	0.012	0.025	0.04	0.03
0.015	0.018	0.02	0.013	0.04					

Suponer que la magnitud de error de dichos equipos se distribuye normalmente. ¿La muestra ofrece evidencia suficiente como para afirmar que no son tan precisos como se piensa?

Sea la v.a. **X** = “magnitud del error de un equipo que detecta movimientos” (mm), **X** ~ N(μ , σ^2), σ^2 es desconocido.

1. Planteo
- $H_0: \mu = 0$
 $H_1: \mu \neq 0$





Salida del Infostat

Prueba T para un parámetro

Valor del parámetro probado: 0

Variable	n	Media	DE	LI(95)	LS(95)	T	p(Bilateral)
medicionerror	25	0,02	0,01	0,02	0,03	8,53	<0,0001

Como el valor **$P < 0.0001$** es menor que **0.05**, la hipótesis nula **se rechaza**. Es una prueba **altamente significativa**.

Conclusión: Con una probabilidad menor a **0.0001**, hay evidencias suficientes para afirmar que la magnitud promedio de los errores de medición de esos aparatos difiere de 0. No son precisos.

Prueba de hipótesis para la varianza de una población normal

Se desea probar la hipótesis nula de que la varianza de una población normal σ^2 es igual a un valor específico, por ejemplo σ_0^2 .

Planteo: Se quiere probar $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ frente a una de las siguientes hipótesis alternativas posibles:

1. $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
2. $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$
3. $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$.

El estadístico de prueba:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

donde S^2 es la varianza muestral.

Si H_0 es verdadera, el estadístico de prueba tiene una distribución chi-cuadrada con $n-1$ grados de libertad.

Las respectivas regiones críticas son:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \{ \chi^2_{n-1} / \chi^2_{n-1} < \chi^2_{n-1, \alpha/2} \text{ o } \chi^2_{n-1} > \chi^2_{n-1, 1-\alpha/2} \} \\ 2. \{ \chi^2_{n-1} / \chi^2_{n-1} > \chi^2_{n-1, 1-\alpha} \} \\ 3. \{ \chi^2_{n-1} / \chi^2_{n-1} < \chi^2_{n-1, \alpha} \} \end{array} \right.$$

Prueba de hipótesis para el Desvío Estándar de una población

OBSERVACIÓN IMPORTANTE!!!!

Si se desea probar una afirmación respecto del desvío estándar σ de una población, se deberá plantear las hipótesis y realizar la prueba en términos de la varianza poblacional σ^2 , puesto que el estadístico con distribución conocida, χ^2_{n-1} está en función de σ^2 .

Ejemplo:

Un supervisor de control de calidad en una enlatadora sabe que la cantidad exacta contenida en cada lata varía, pues hay ciertos factores imposibles de controlar que afectan la cantidad de llenado. La variación de la cantidad de llenado es importante; si es grande, algunas latas contendrán muy poco y otros demasiado. Las agencias reguladoras especifican que el desvío estándar de la cantidad de llenado debe ser menor que 0.1 onzas. El supervisor de control de calidad muestreó $n = 10$ latas y midió la cantidad de llenado en cada una, obteniendo un desvío estándar igual a 0.043. ¿Proporciona esta información prueba suficiente de que el desvío estándar σ de las mediciones de llenado es menor que 0.1 onzas, trabajando a un nivel de significación del 1%? Se puede suponer que la cantidad de llenado sigue una distribución normal.

Sea la v.a. X = “cantidad de llenado por lata”, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Planteo:

$H_0: \sigma^2 = 0.01$ (es equivalente a $\sigma^2 \geq 0.01$)

$H_1: \sigma^2 < 0.01$

$\alpha = 0.01$

Estadístico de prueba bajo H_0 :

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{(10-1)S^2}{0.01} = \chi^2_{n-1} = 9$$

Región crítica:

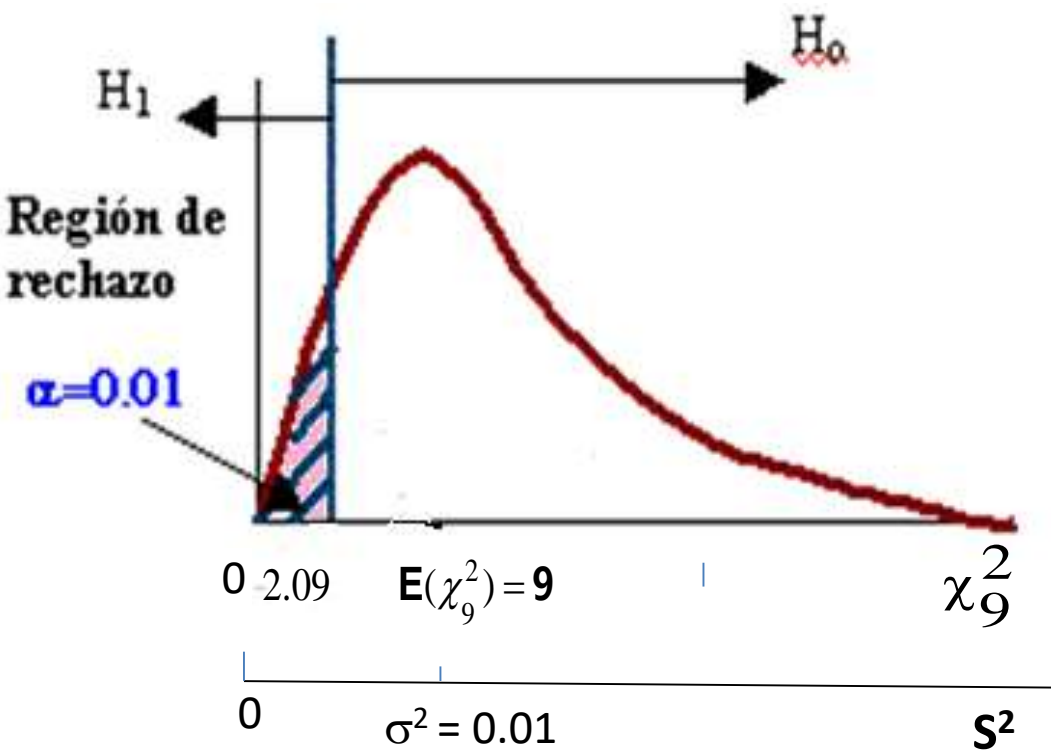
$$RC = \left\{ \chi^2_9 / \chi^2_9 < \chi^2_{9, 0.01} = 2.09 \right\}$$

El valor del estadístico es:

Datos: $n = 10$ y $s = 0.043$ minutos

$$\chi^2_9 = \frac{9 * (0.043)^2}{0.01} = 1.66$$

Como $\chi^2_9 = 1.66 \in$ **Región crítica**, por lo tanto **Rechazo H_0** .



Conclusión:

Con una probabilidad de error del **0.01**, la varianza de la población de todas las cantidades de llenado es menor que 0.01 (o σ menor a 0.1), por lo tanto la enlatadora está operando dentro de los límites de variabilidad deseados. La prueba es **altamente significativa**.

Ejercicios:

1. La compañía telefónica estudia continuamente la duración de las comunicaciones telefónicas y la variabilidad de dicha duración. El desvío estándar poblacional de la duración de las llamadas en todo el país es de 2 minutos. La compañía telefónica desea determinar si las llamadas efectuadas en cierta localidad difieren de las de todo el país en cuanto a la variabilidad. Si una muestra aleatoria de 25 llamadas efectuadas en dicha localidad arrojó un desvío de 1.6 minutos, a un nivel de significación del 5% ¿qué se puede concluir? Puede suponerse que la duración de las llamadas se distribuye normalmente.

2. Con el fin de tener ordenada la escala salarial del personal docente en una universidad, el decano trata de que la varianza de los salarios del centro se mantenga en 4000 dólares². Si no es así, realizará ajustes para dejar los salarios dentro de límites. Para ello se seleccionó una muestra de 10 docentes obteniéndose los siguientes sueldos en dólares:

2100 2270 2250 2300 2240 2300 2200 2295 2100 2250

- a) Al nivel del 1%, ¿deberá realizar el decano ajustes de salarios? Suponer normalidad de los datos.
- b) Según el enfoque P ¿Qué puede concluir?

Sea la v.a. X = "tiempo, en minutos, de duración de una llamada en la localidad", $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Planteo:

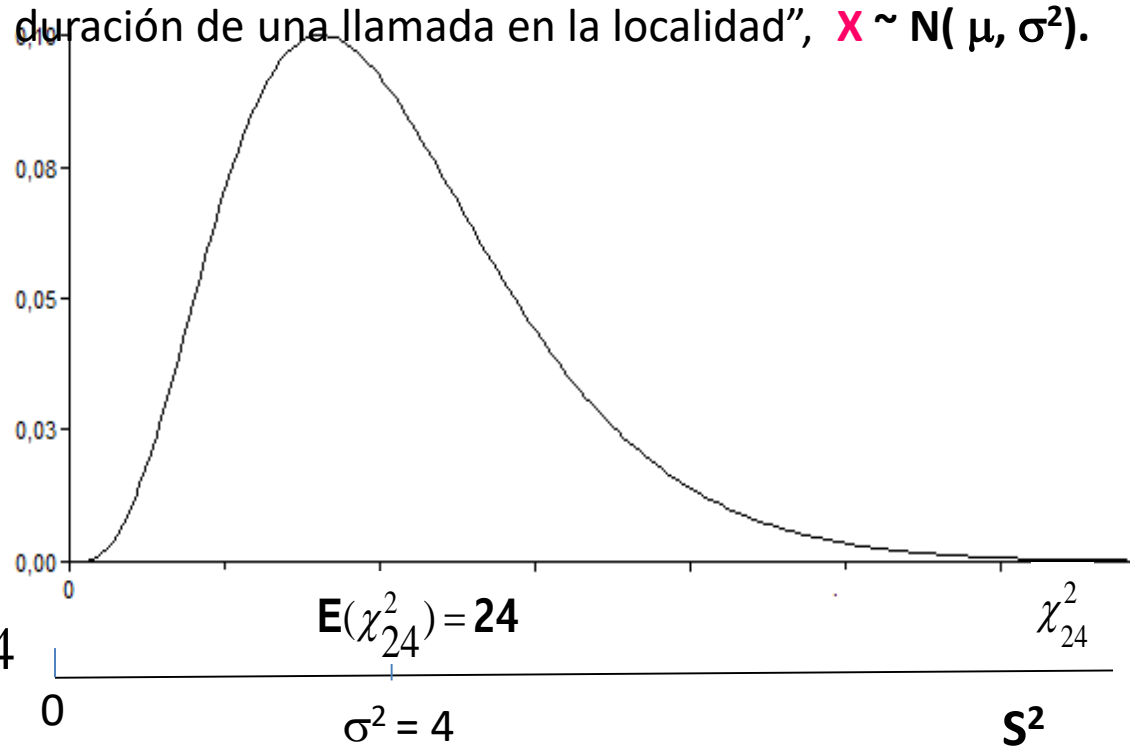
$$H_0: \sigma^2 = 4$$

$$H_1: \sigma^2 \neq 4$$

$$\alpha = 0.05$$

Estadístico de prueba bajo H_0 :

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{(25-1)}{4} S^2 = \chi^2_{n-1} = 24$$



Región crítica:

$$RC = \left\{ \chi^2_{24} / \chi^2_{24} < \chi^2_{24,0.025} = 12.40 \quad \text{ó} \quad \chi^2_{24} > \chi^2_{24,0.975} = 39.36 \right\}$$

El valor del estadístico es:

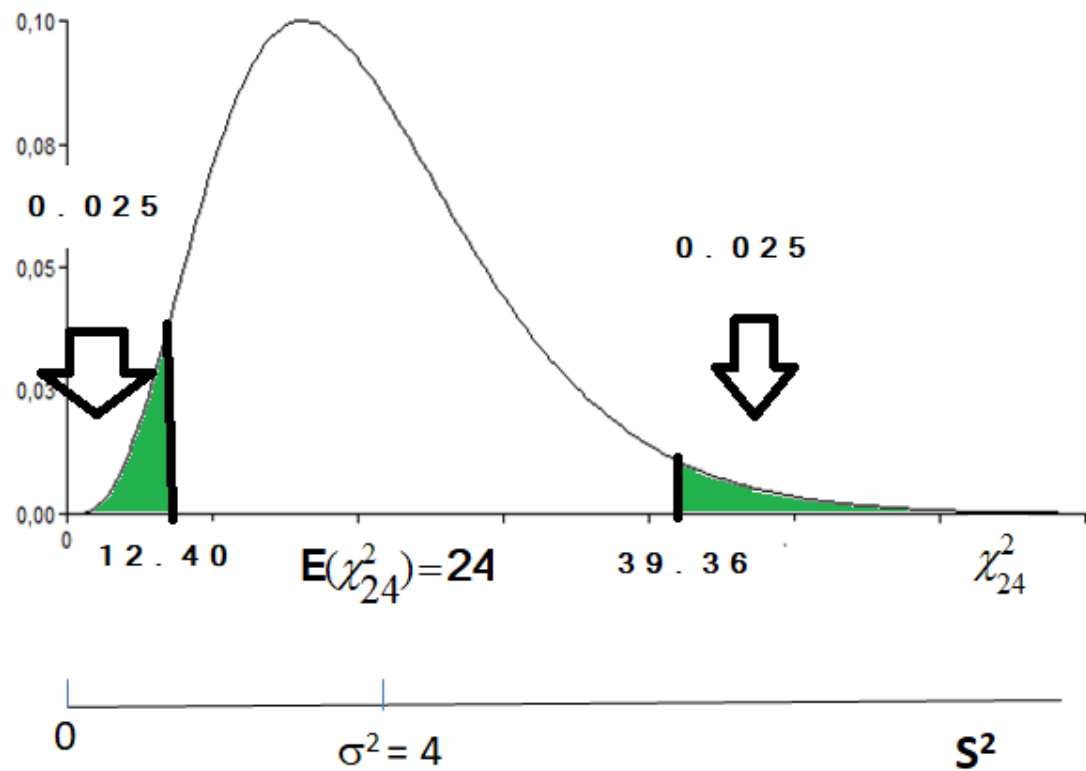
Datos: $n = 25$ y $s = 1.6$ minutos

$$\chi^2_{obs} = \frac{24 * (1.6)^2}{4} = 15.36$$

Como $\chi^2_{obs} = 15.36 \notin$ Región crítica, por lo tanto **NO Rechazo H_0** .

Conclusión:

Con un nivel de significación de 0.05, no tengo evidencias suficientes para afirmar que la variabilidad de la duración de las llamadas en la localidad difieran de 4 minutos ². La prueba es no significativa.



Sea la v.a. X = “salario de un docente de una universidad” (dólares) , $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

a) Planteo:

$H_0: \sigma^2 =$

$H_1: \sigma^2$

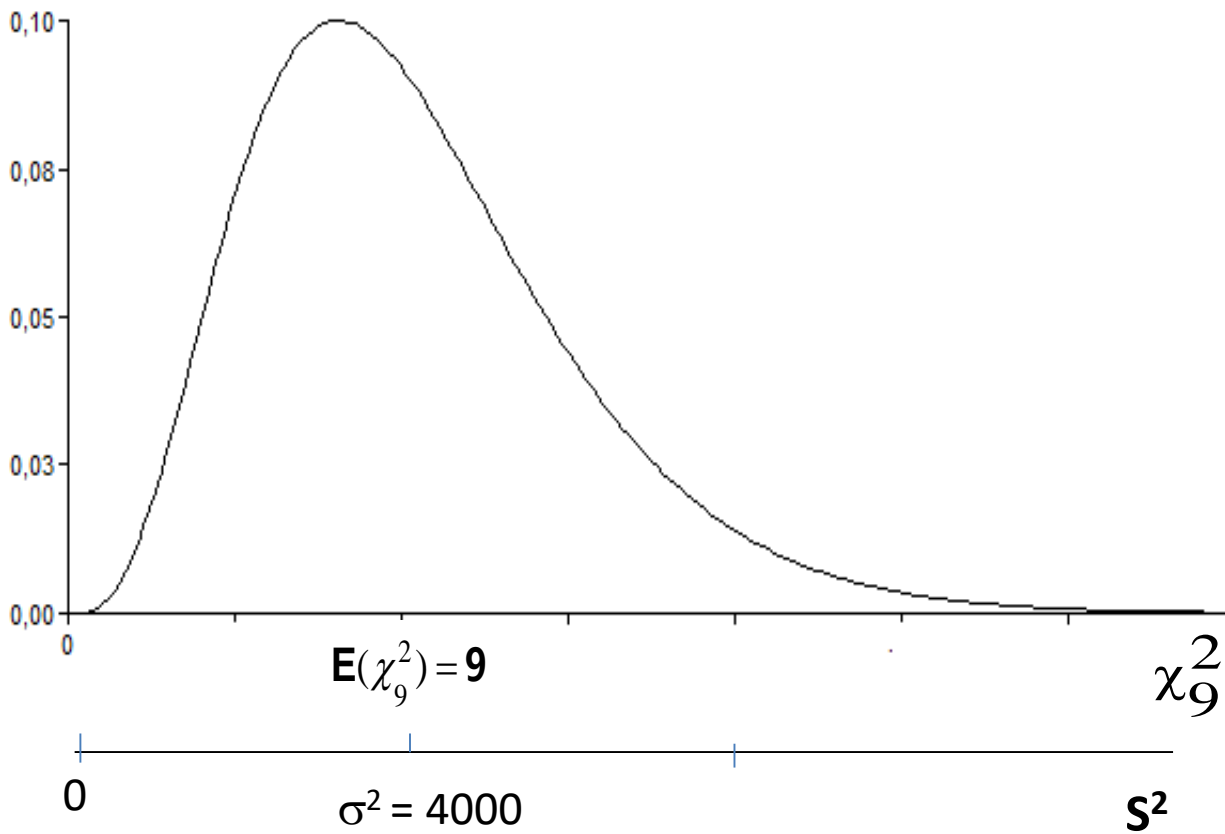
$\alpha =$

Estadístico de prueba bajo H_0 :

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{(-1)S^2}{\sigma^2} = \chi^2_{n-1} =$$

Región crítica:

$$RC = \left\{ \chi^2 \mid \chi^2 < \chi^2_{\alpha}, = \right\}$$



El valor del estadístico es:

Datos: $n =$ y $s =$

$$\chi^2_{obs} = \frac{ * ()^2 }{ } =$$

Como $\chi^2_{obs} =$

Región crítica, por lo tanto

Rechazo H_0 .

Conclusión:

Con del 0.

. La prueba es **significativa.**

b) enfoque P

Planteo:

$$H_0: \sigma^2 =$$

$$H_1: \sigma^2$$

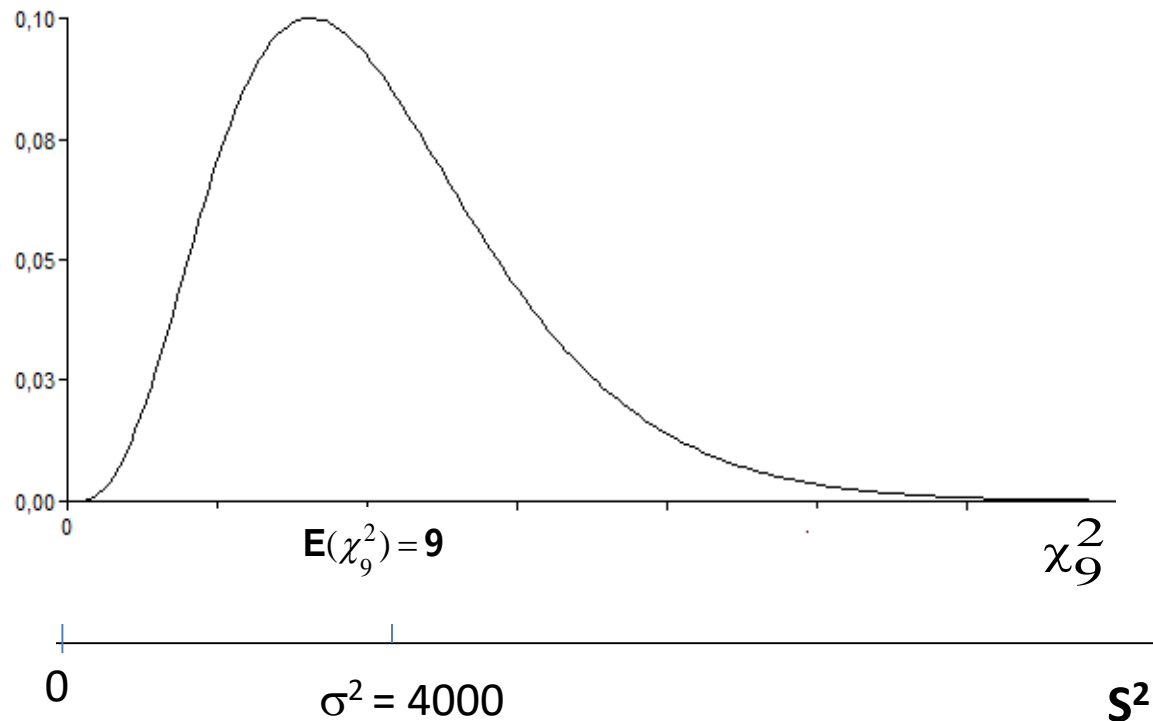
Estadístico de prueba bajo H_0 :

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{(-1)^2}{\sigma^2} = \chi^2_{n-1} =$$

El valor del estadístico es:

$$\chi^2_{\text{obs}} = \frac{*}{4} =$$

Datos: $n =$ y $s =$



$$\text{valor } P = P(X^2_9 \geq X^{obs}_2) = 2 * P(X^2_9 \geq \quad) =$$

Como $P = 0.05$, por lo tanto **Rechazo H_0 .**

Conclusión:

Con $\alpha = 0.05$ del 0.05 .

. La prueba es **significativa.**